数理解析研究所講究録
第80巻 1970年 14-23

Wiener − Hermite 展開

関学大 理　今 村 勤

§1. ま え が き

乱流を速度場自身がrandom function である様に統計的に理想化することが出来るであろう。この様なrandom function を扱うのに有用な方法としてWiener − Hermite 展開がある。[1)〜3)] 即ち未知のrandom function をideal random functionのHermite 多項式に展開する方法である。

この方法の乱流への応用はいろいろなされているが[4)〜8)]その利点としては,

(1) Gaussに近いrandom function を扱うのに適当であること。

(2) スペクトル等に正定符号の値を与えること。

(3) 近似の進め方が機械的に出来ること。

(4) 展開を有限項できって展開係数に対する方程式系を作ると他の近似(例えばquasi−linear近似)と同形の方程式系を与えることがよくあること。

などがあげられる。ここでは主としてその応用に必要なテクニックに重点を置いてのべることにする。時間的に変るideal random functionを用いた展開については講演内容を少し補足した。

§2. Wiener−Hermite 展開におけるoperator calculus[3)]

ここではWiener等の形式でなく,いく分数学的厳密性を犠牲にしても,物理的応用に都合のよい形でWiener −Hermite 展開における計算法を説明する。

今一つのrandom variable Xがあるとき,aをideal random variable, H_nをHermite 函数として

$$X=\sum_n C_n \ H_n(a)$$

の形に展開出来ることが知られている。ideal random variableとは自乗平均が1である様な平均値が0のGauss分布をするrandom variableである。一旦aをきめるとC_nは一意的に

きまり，Xのすべてのmoment はC_nでかける。

変数$\{ X_i \}$がN個あれば，これらを表はすのにN個の互ひに独立なideal random variables $\{ a_i \}$を用いて

$$X_i = \sum_{(n_j)} C_i^{(n_j)} H_{(n_j)} (a_1 a_2 \cdots a_N)$$

の如く表はせる。$\sum\limits_{(n_j)}$ は$n_1 n_2 \cdots n_N$ のすべての組に対しての和であり，

$$H_{(n_j)} = \prod_j H_{n_j}(a_j)$$

は多変数のHermite函数である。

乱流を初期速度場のrandomness が時間と共にどう変化するかという様に理解すると初期速度場のrandomness を表はすのに3×∞³ 個のideal random variables 即ち3つのideal random functions $a_j(\vec{x})$を用いて展開出来るであらう。この様に自由度を連続無限個に拡張するためには次にのべるoperator 形式が最適と考えられる。

今operator C, Dを次の様に導入する。

$$C = \frac{a}{2} - \frac{\partial}{\partial a}, \quad D = \frac{a}{2} + \frac{\partial}{\partial a}$$

当然$a = C + D$であり，$[C, D] = CD - DC = -1$の交換関係を充す。この交換関係は$N = CD$をnumber operator としてC, Dに夫々creation anihilation operatorとしての性質を与える。C, Dを用いてH_nは

$$H_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^{n-k} D^k = :(C+D)^n:$$

の如く表はされる。ここに：　：はWick により導入された[9]記号で中のcreation operatorの左におくという約束を示す。H_nのこの表現の証明はH_0が一致し同じ漸化式を充すことを示すことにより容易に得られる。さらに

$$h_0 = (2\pi)^{-\frac{1}{4}} e^{-a^2/4}, \quad c h_n = h_{n+1}$$

で$set\{h_i\}$を定義すると，これらは調和振動子の固有状態の組を与える。或いはh_0を粒子のない状態vacuum h_nをn個粒子のある状態と解釈出来る。実際これを裏づける

$$Dh_0 = 0, \quad Dh_n = nh_{n-1}, \quad Nh_n = nh_n$$

が容易に示される。aの函数$X(a)$の統計的平均は

$$\langle X(a) \rangle = \int X(a) \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-a^2/2} da = \int h_0 X(a) h_0 da$$

とかけるので，operator $X(a)$ の h_0 状態での期待値に他ならない。

$$<H_{n_1}(a)H_{n_2}(a)\cdots H_{n_r}(a)> = <:(C+D)^{n_1}::(C+D)^{n_2}:\cdots:(C+D)^{n_r}:>$$

の計算を h_0 での期待値として行うと，どれかの H_n の中の C で作られた粒子がそれより左にある他の H の中の D で消されなければ 0 になることから計算規則としては

(1) H_{n_i} に対し n_i 個の点をかく

(2) すべての点を２つづつ pair にする。このとき同じ H の中の２点は pair を作ってはならない。

　：：の中では C が左にあるためその中で作られた粒子を自分の中の D で消せないからである。

(3) その pairing の組の可能な数が統計的平均値である。

例として $<H_1\ H_1\ H_2>$ をとると，上の手続きは，

(1) ・　・　：

(2) ・　・　：　　　・　・　：

(3) 組の数は上の２つ故 $<H_1\ H_1\ H_2>=2$。

これを N 変数のときに拡張するのは，N 個の粒子系を扱う operator の組 $\{C_i,\ D_i\}$

$$C_i=\frac{a_i}{2}-\frac{\partial}{\partial a_i}\ ,\qquad D_i=\frac{a_i}{2}+\frac{\partial}{\partial a_i}$$

を導入すれば $a_i=C_i+D_i$，$[C_i,\ D_j]=-\delta_{ij}$，$[C_i,\ C_j]=[D_i,\ D_j]=0$ 等が充され，

$$H_{(n_j)}=\prod_{j=1}^{N}:(C_j+D_j)^{n_j}:=:\prod_{j=1}^{N}(C_j+D_j)^{n_j}:$$

とかけるから

$$X_i=\sum_{(n_j)}C_i^{(n_j)}H_{(n_j)}=\sum_{m}\sum_{(\nu_m)}C_i^{(\nu_1\nu_2\cdots\nu_m)}H_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}$$

$$H_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}=:\prod_{j=1}^{m}(C_{\nu_j}+D_{\nu_j}):$$

の様にくみかえられる。従って $<H_{\nu_1^{(1)}\cdots\nu_{m_1}^{(1)}}\ H_{\nu_1^{(2)}\cdots\nu_{m_2}^{(2)}}\cdots H_{\nu_1^{(r)}\cdots\nu_{m_r}^{(r)}}>$ の計算では各 H に夫々 m_j 個の点をかき，一変数のときと同様の pairing をやる。但し各 pair に対し $\delta_{\nu_j^{(l)}\nu_k^{(m)}}$ の様な factor をつける。なぜなら同種の粒子を消さなければならないからである。

連続無限個の変数に拡張するには，連続無限個の調和振動子を持った系，即ち自由場の量子論に対応

するcreation, anihilation operatorsの集りを用意すればよい。これを速度場$u_j(\vec{x})$について説明すると，3コのideal random functions $a_j(\vec{x})$を導入して

$$u_j(\vec{x})=K_j^{(0)}(\vec{x})+\sum_{j_1}\int d\vec{x}_1\, K_{jj_1}^{(1)}(\vec{x},\vec{x}_1)H_{j_1}(\vec{x}_1)+\sum_{j_1j_2}\int d\vec{x}_1\, d\vec{x}_2\, K^{(2)}_{jj_1j_2}(\vec{x}_1\vec{x}_1\vec{x}_2)H^{(2)}_{j_1j_2}(\vec{x}_1\vec{x}_2)+\cdots\cdots$$

の如く展開される。ここに$K^{(n)}$は普通の函数であり，

$$H^{(n)}_{j_1j_2\cdots j_n}(\vec{x}_1\vec{x}_2\cdots\vec{x}_n)=:a_{j_1}(\vec{x}_1)a_{j_2}(\vec{x}_2)\cdots a_{j_n}(\vec{x}_n):$$

とかけ，$a_j(\vec{x})$はideal random functionsで各点で独立のGauss分布をし，

$$<a_j(\vec{x})a_k(\vec{y})>=\delta_{jk}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

を充す。$a_j(\vec{x})$の汎函数の統計的平均をとるには

$$a_j(\vec{x})=C_j(\vec{x})+D_j(\vec{x})$$

$$[C_j(\vec{x}),D_k(\vec{y})]=-\delta_{jk}\delta(\vec{x}-\vec{y}),\quad [C_j(\vec{x}),C_k(\vec{y})]=[D_j(\vec{x}),D_k(\vec{y})]=0$$

を導入し，$D_j(\vec{x})|>=0$ を充す状態(vacuum)で期待値をとればよい。特に$K^{(n)}$の方程式を得るために必要な

$$<H^{(n_1)}_{j_{11}j_{12}\cdots j_{1n_1}}(\vec{x}_{11},\vec{x}_{12}\cdots x_{1n_1}),H^{(n_2)}_{j_{21}j_{22}\cdots j_{2n_2}}(\vec{x}_{21},\vec{x}_{22}\cdots\vec{x}_{2n_2})\cdots>$$

の計算法の手続きを示すと，

(1) 各$H^{(n_j)}$に対しn_j個の点$(j_1)(j_2)\cdots(jn_j)$をかく

(2) 各点を2つづつpairにするすべての図をかく，但し同じHに属する2点はpairingしない。pairをとれずに点が残るときは0である。例へば$\sum n_j=\mathrm{odd}$なら0である。

(3) 各pairに付してδ函数を対応さす。

(4) すべての寄与の和をとる。

例として$<H^{(1)}_{j_{11}}(\vec{x}_{11})H^{(1)}_{j_{21}}(\vec{x}_{21})H^{(2)}_{j_{31}j_{32}}(\vec{x}_{31}\vec{x}_{32})>$ をとらう。

(1) (11)·　(21)·　·(31) ·(32)

(2) (a)(11)·　(21)·　·(31) ·(32)　　(b)(11)·　(21)·　·(31) ·(32)

(3) (a) $\delta_{j_{11}j_{32}}\delta(\vec{x}_{11}-\vec{x}_{32})\delta_{j_{21}j_{31}}\delta(\vec{x}_{21}-\vec{x}_{31})$

$$(b)\ \delta_{j_{11}j_{31}}\ \delta(\vec{x}_{11}-\vec{x}_{31})\ \delta_{j_{21}j_{32}}\ \delta(\vec{x}_{21}-\vec{x}_{32})$$

$$(4)\quad \langle\ \rangle = \delta_{j_{11}j_{32}}\delta(\vec{x}_{11}-\vec{x}_{32})\,\delta_{j_{21}j_{31}}\delta(\vec{x}_{21}-\vec{x}_{31}) + \delta_{j_{11}j_{31}}\delta(\vec{x}_{11}-\vec{x}_{31})\ \delta_{j_{21}j_{32}}\ \delta(\vec{x}_{21}-\vec{x}_{32})$$

の様に計算される。

特に空間の一様性があるときにはＦｏｕｒｉｅｒ変換で話をすると便利である。このとき$K^{(o)}=0$で

$$U_i(\vec{x}) = \int d\vec{x}' \sum_j K^{(1)}_{ij}(\vec{x}-\vec{x}')\,H^{(1)}_j(\vec{x}') + \int d\vec{x}'\,d\vec{x}''\sum_{jk} K^{(2)}_{ijk}(\vec{x}-\vec{x}',\ \vec{x}-\vec{x}'')\ H^{(2)}_{jk}(\vec{x}',\ \vec{x}'') + \cdots\cdots$$

の様にかけるからU，K，HのＦｏｕｒｉｅｒ変換を夫々$\widetilde{U}\widetilde{K}\widetilde{H}$とすると，

$$\widetilde{U}_i(\vec{k}) = \sum_j \widetilde{K}^{(1)}_{ij}(\vec{k})\,\widetilde{H}^{(1)}_j(\vec{k}) + \int d\vec{k}' \sum_{jk}\widetilde{K}^{(2)}_{ijk}(\vec{k}-\vec{k}',\ \vec{k}')\,\widetilde{H}^{(2)}_{jk}(\vec{k}-\vec{k}',\ \vec{k}'') +$$

となり，$\widetilde{H}_j$ については

$$\langle \widetilde{H}^{(1)}_k(\vec{k})\,\widetilde{H}^{(1)}_l(\vec{l}) \rangle\ \delta_{kl}\ \delta(\vec{k}+\vec{l})$$

等が成立する。

以上の計算法を用うることにより，$U_j(\vec{x})$ が例えばＮａｖｉｅｒ－Ｓ ｔｏｋｅｓ方程式を充すと仮定して$K^{(n)}$に対する方程式系を得るのは容易である。即ち方程式に展開を代入し平均をとると，$\dfrac{\partial K^{(0)}}{\partial t}$ を含む方程式，$H^{(1)}$をかけて平均をとると $\dfrac{\partial K^{(1)}}{\partial t}$ を含む方程式という様に無限個の$K^{(n)}$に対して無限個の連立方程式が得られる。これを実際にとり扱うのには有限個で切って近似しなければならない。本来この展開はＧａｕｓｓ分布，その補正項という形の展開になっているためにＧａｕｓｓ に近い現象を扱うのに便利であると期待された。しかし次の様な困難が知られるに致った。非圧縮性非粘性流体に対してＨｏｐｆの解が知られている。[10] この解はＧａｕｓｓ 分布をしているのでこれに対応して

$$U_i(\vec{k}\ \ t) = \sum_j K^{(1)}_{ij}(\vec{k}\ \ t)\,H^{(1)}_j(\vec{k})$$

の形の解を求めようとしても求まらない。[*] さらに，３－ｍｏｄｅ－ｍｏｄｅｌ　即ち$\dot{X}_i = A_i X_j X_k\left(\sum_{i=1}^{3} A_i = 0\right)$（$i$，$j$，$k$　ｃｙｃｌｉｃ）のある解としてＧａｕｓｓ 分布を示す解が存在するが，これを$X_i = P_i a_i + Q_i a_i a_k$ の形で近似し得ない。[11] これらの例は厳密にＧａｕｓｓ 分布をする解でもＷｉｅ－ｎｅｒ－Ｈｅｒｍｉｔｅ 展開の有限項ではうまく表はせないことを示している。従ってたとえ数学的に展

＊）１９６７年１２月京大数理解析研に於ける土井政昭君との報告

開の収斂性が保証されていても，もっとも適当であるべきGauss 分布のときでも有限項の近似が悪いという実用的に大変困る事実を示している。

この困難を克服するには$a(\vec{x})$を各時刻で共通のものをとる必要がない点に着目する。即ち各時刻で$U_j(\vec{x}\ t)$がGauss 分布に近ければ，各時刻でそれが展開の数項でよく近似される様な適当な$a(\vec{x}\ t)$が存在する筈である。従って各時刻での展開が早く収斂する様に各時刻で$a(\vec{x}\ t)$をとっていくとよい近似は保たれるであろう。この考えを次節で実行に移す。

§ 3. 時間的に変わる ideal random functions を用いたWiener－Hermite 展開[8)]

速度場のFourier 変換を例にとり，説明しよう。展開

$$U_i(\vec{k}\ t)=\sum_j K_{ij}^{(1)}(\vec{k}\ t)H_j^{(1)}(\vec{k}\ t)+\sum_{jl}\int d\vec{k}'\,K_{ijl}^{(2)}(\vec{k}-\vec{k}',\ \vec{k}')H^{(2)}(\vec{k}-\vec{k}',\vec{k}'\ t)+\cdots\cdots\cdots$$

において，今度は$H^{(n)}$を時刻によって異なるものとする。その時間的変化はやはり確率函数であり，かつ都合のよい ideal random functionが時間と共にそんなに急に変らないとして

$$\frac{d}{dt}H_j^{(1)}(\vec{k},\ t)=\sum_k L_{jk}^{(1)}(\vec{k},\ t)\,H_k^{(1)}(\vec{k},\ t)+\sum_{kl}\int d\vec{k}'\,L_{jkl}^{(2)}(\vec{k}-\vec{k}',\vec{k}',\ t)\,H_{kl}^{(2)}(\vec{k}-\vec{k}',\vec{k}'\ t)+\cdots\cdots\cdots$$

の様に書けるものとする。すべての時刻で ideal random functionであるための必要且充分な条件は

$$\frac{d}{dt}<H_{j_1}^{(1)}(\vec{k}_1)H_{j_2}^{(1)}(\vec{k}_2)\cdots H_{j_n}^{(1)}(\vec{k}_n)>=0$$

である。このことからLについて次の様な制限がつく

$$L_{ij}^{(1)}(\vec{k})+L_{ji}^{(1)}(-\vec{k})=0$$

$$\{L_{ijl}^{(2)}(\vec{k}_2\ \vec{k}_3)+L_{ilj}^{(2)}(\vec{k}_3\ \vec{k}_2)+L_{jli}^{(2)}(\vec{k}_3\ \vec{k}_1)+L_{jil}^{(2)}(\vec{k}_1\ \vec{k}_3)$$
$$+L_{lij}^{(2)}(\vec{k}_1\ \vec{k}_2)+L_{lji}^{(2)}(\vec{k}_2\ \vec{k}_1)\}\,\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3)=0$$

etc.

これを用ひて前述のHopf の場合を考えてみよう。非圧縮性非粘性流体のNavier－Stokes

方程式のＦｏｕｒｉｅｒ変換した式は

$$\frac{\partial}{\partial t}U_j(\vec{k}\ t)+i\sum\triangle_{jl}(\vec{k})\int d\vec{k}'\,U_m(\vec{k}-\vec{k}',\ t)\,k'_m\,U_l(\vec{k}')=0$$

$$\triangle_{jl}(\vec{k})=\delta_{jl}-k_jk_l/\vec{k}^2$$

である。この方程式のGauss形の解を求めるため速度場のＷｉｅｎｅｒ－Ｈｅｒｍｉｔｅ展開を第一項だけで書き

$$U_j(\vec{k}\ t)=\sum\triangle_{jl}(\vec{k})\,K_{lm}(\vec{k},\ t)\,H^{(1)}_m(\vec{k}\ t)$$

を方程式に代入する。まず統計的平均値をとると

$$i\sum\triangle_{jl}(\vec{k})\int d\vec{k}'\triangle_{mn}(\vec{k}-\vec{k}')\,K_{nq}(\vec{k}-\vec{k}',\ t)\,k'_m\triangle_{lp}(\vec{k}')\,K_{pq}(\vec{k}',\ t)\,\delta(\vec{k})=0$$

これは自動的に充される。次に$H^{(1)}_\alpha(-\vec{p})$をかけて平均をとると

$$\sum_l\frac{\partial}{\partial t}\triangle_{jl}(\vec{p})\,K_{l\alpha}(\vec{p},\ t)+\sum\triangle_{jl}(\vec{p})\,K_{lm}(\vec{p}\ t)\,L^{(1)}_{m\alpha}(\vec{p}\ t)=0$$

但し$L^{(n)}(n\geqq 3)=0$とした。$L^{(1)}$は一般性を失はずに０にとれる[8]ので$K_{l\alpha}$がt－independentであればこれは充される。最後に$H^{(2)}_{\alpha\beta}(-\vec{p},\ -\vec{q})$をかけて平均をとると，

$$\sum\triangle_{jl}(-\vec{k})K_{lm}(-\vec{k},\ t)\,[\,L^{(2)}_{m\alpha\beta}(\vec{p}\,\vec{q}\ t)\,]\,\delta(\vec{p}+\vec{q}+\vec{k})$$

$$=[-i\sum\triangle_{jl}(-\vec{k})\triangle_{mn}(\vec{p})K_{n\alpha}(\vec{p}\ t)\,q_m\triangle_{ls}(\vec{q})K_{s\beta}(\vec{q}\ t)$$

$$-i\sum\triangle_{jl}(-\vec{k})\triangle_{mn}(\vec{q})K_{n\beta}(\vec{q}\ t)\,p_m\triangle_{ls}(\vec{p})K_{s\alpha}(\vec{p}\ t)]\,\delta(\vec{p}+\vec{q}+\vec{k})$$

この式は

$$L^{(2)}_{j\alpha\beta}(\vec{p}\,\vec{q}\ t)=-\frac{i}{2}\sum K^{-1}_{js}(-\vec{k})\triangle_{st}(-\vec{k})[\triangle_{lm}(\vec{p})K_{m\alpha}(\vec{p}\ t)\,q_l\triangle_{tn}(\vec{q})K_{n\beta}(\vec{q}\ t)+\triangle_{lm}(\vec{q})K_{m\beta}(\vec{q}\ t)\,p_l\triangle_{tn}(\vec{p})K_{n\alpha}(\vec{p}\ t)]$$

なら充される。前述の$L^{(2)}$に関する制限条件を充すためには

$$\mathscr{H}^2K^{-1}_{js}(-\vec{k}\ t)=K_{sj}(\vec{k}\ t)$$

であればよい。$H^{(n)}(n\geqq 3)$をかけて平均をとれば０＝０である故，Gauss形の速度場として

$$U_j(\vec{k}\ t)=\sum\mathscr{H}\triangle_{jl}(\vec{k})K_{lm}(\vec{k})H^{(1)}_m(\vec{k}\ t)$$

$$\sum_j\mathscr{H}^2K_{sj}(-\vec{k})K_{tj}(\vec{k})=\sum_j\mathscr{H}^2K_{js}(-\vec{k})K_{jt}(\vec{k})=\delta_{st}$$

が得られる。この速度場の特性函数をつくると

$$\Phi\,[z(\vec{k})]=\langle e^{i[z,\ u]}\rangle=exp\{-\frac{\mathscr{H}^2}{2}[\tilde{z},\ \tilde{z}]\}$$

となる。ここで$[z,\ u]=\sum_j\int d\vec{k}\ \ z_j(\vec{k})$，$\tilde{z}_j(\vec{k})=\sum_l\triangle_{jl}(\vec{k})z_l(\vec{k})$である。これはＨｏｐｆの特解と一致している。

3－mode－modelの場合も全く同様にGauss 形の解が

$$X_i = p_i a_i$$

の形で表はせることが示される。[8)]

§ 4. 運動方程式系と取り扱うべき諸問題

例として非粘性のBurgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}u^2 = 0$$

をとらう。u と$\dot{H}^{(1)}$のWiener－Hermite 展開をsymbolic に

$$u = K^{(0)} + \alpha K^{(1)} H^{(1)} + \alpha^2 K^{(2)} H^{(2)} + \cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha \dot{H}^{(1)} = \alpha^2 L^{(2)} H^{(2)} + \cdots\cdots\cdots$$

とかこう。αは後の議論のため形式的につけた。u の展開を方程式に入れ平均をとると，

$$\frac{\partial K^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\{K^{(0)}K^{(0)} + \alpha^2 K^{(1)}K^{(1)} + \alpha^4 K^{(2)}K^{(2)} + \cdots\cdots\cdots\} = 0$$

$H^{(1)}$をかけて平均をとると

$$\frac{\partial K^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\{K^{(0)}K^{(1)} + K^{(1)}K^{(0)} + \alpha^2 (K^{(1)}K^{(2)} + K^{(2)}K^{(1)}) + \cdots\cdots\cdots\} = 0$$

$H^{(2)}$をかけて平均をとると

$$\frac{\partial K^{(2)}}{\partial t} + K^{(1)}L^{(2)} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\{K^{(0)}K^{(2)} + K^{(2)}K^{(0)} + K^{(1)}K^{(1)} + \cdots\cdots\cdots\} = 0$$

等を得る。今かりにu の展開を$H^{(n)}$できったものを厳密解だとすると，方程式系は$H^{(2n)}$をかけて平均をとったもの迄即ち（$2n+1$）個の方程式が（$n+1$）個の未知函数$K^{(n)}$に対して成立せねばならない。例えばGauss 形のときは$K^{(0)}K^{(1)}$に対し

$$\frac{\partial K^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\{K^{(0)}K^{(0)} + \alpha^2 K^{(1)}K^{(1)}\} = 0$$

$$\frac{\partial K^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\{K^{(0)}K^{(1)} + K^{(1)}K^{(0)}\} = 0$$

$$K^{(1)}L^{(2)} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}K^{(1)}K^{(1)} = 0$$

である。又u の展開を$H^{(n)}$できったものを近似解だとする立場では始めの（$n+1$）個の方程式だけを用いる。後のn 個は$K^{(n+1)}$ 以下をきめる方程式であると考える。このとき純粋に摂動論的な立場に立つと各方程式で$\alpha = 0$ としたものをとるべきである。展開をきる以外は近似しない立場では例えば$K^{(1)}K^{(1)}$の様な非線形項が$\dfrac{\partial K^{(0)}}{\partial t}$ の方程式に出てくる。この事情は安定性の問題等に用いたとき夫々線

形近似とqusi－linear近似の方程式系を与えることに対応する。

これらのことをふまえて，取り扱はれた或は取り扱はるべき諸問題を表にすると，

	平均流なし	平均流あり
exactly Gaussian	Hopf の特解[a] 3－mode－model[a]	
nearly Gaussian	$K^{(1)}H^{(1)}+K^{(2)}H^{(2)}$ 統計的平衡に漸近？ 平衡でのスペクトル？ 3－mode－model[b] Burgers，Navier－Stokes[c]	$K^{(0)}+K^{(1)}H^{(1)}$ 統計的平衡[d] 安定性[d] $K^{(0)}+K^{(1)}H^{(1)}+K^{(2)}H^{(2)}$ 統計的不安定性

(a) Ref. 8で解決ずみ。

(b) 関学田中修平君が適当なaの時間変化をとることにより研究中。平衡点の周囲を展開の近似をよく保ったまゝ振動する近似解があること。aの時間変化に非線形の大きな影響をおしこめ後を線形化してやっても近似があまり悪くならないこと。等が判っている。

(c) 粘性のため平衡は近似的である。複雑なためそのまま数値積分で調べず，(b)でのべた様な線形化を考慮中である。

(d) Vlasov方程式のときRef. 7でNavier－Stokes方程式のときRef. 8で基本方程式系がquasi－linear 近似のそれと一致することを示した。

文　　献

(1) R. H. Cameron and W. T. Martin, Ann. Math. **48** (1947) 385.

(2) N. Wiener, Non-linear Problems in Random Theory (John Wiley & Sons, Inc. New York 1958).

(3) T. Imamura, W. C. Meecham and A. Siegel, J. Math. Phys. **6** (1965) 695.

(4) A. Siegel, T. Imamura and W. C. Meecham, Phys. of Fluids **6** (1963) 1519.

(5) W. C. Meecham and A. Siegel, Phys. of Fluids **7** (1964) 1178.

(6) A. Siegel, T. Imamura and W. C. Meecham, J. Math. Phys. **6** (1965) 707.

(7) T. Imamura and T. Taniuchi, Phys. of Fluids **9** (1966) 1503.

(8) M. Doi and T. Imamura, to be published Prog. Theor. Phys.

(9) G. C. Wick, Phys. Rev. **80** (1950) 268.

(10) E. Hoff, J. Rat. Mech. Analysis **1** (1952) 87.

(11) S. A. Orszak and L. R. Bissonette, Phys. of Fluids **10** (1967) 2603.